747. 確率法則ノ分解問題 V

北川　敏男（阪大）

吾々ハ，今マデ、與ヘラレタ確率法則ノ分解問題ヲ論ズルニ當リ、分解ノ構成因子ヲ K 即チ凡ベテノ確率法則ノ集合ニ求メテ來タ。即チ、分解ノ構成因子トシテハ、コレニ何等ノ制限ヲ置カズ，確率法則デアリサヘスレバヨカッタ。無限ニ分解可能トカ、分解不可能トカイフ概念モミナ K ニ於ケル分解ニ関スルモノデアッタ。コノ様ナ分解問題ヲ、K ニ於ケ

ル分解問題ト呼ブナラバ，コレニ對立シテ、特殊領域ニ於ケル分解問題ガアル譯デアル。即チ與ヘラレタ確率法則 $\mathcal{L}$ ヲ分解スルニ際シ、分解ノ構成因子ヲ、K ノ或ル與ヘラレタ特定ノ部分集合 K' ニ屬スルモノニ局限シタ場合ノ研究モ亦必要デアル。

$\mathcal{L}$ ニ對シテ K' ノ與ヘ方ハ限リナクアリ、ソノ何レヲ研究スルカハ，任意デアルが．$\mathcal{L}$ ニ何等カノ意味デ近親デアルヤウナ確率法則ノ集合トシテ K' ヲトツテ、K' ニ於ケル $\mathcal{L}$ ノ分解問題ヲ論ズルコトカラ始メルノモ一ツノ行キ方デアロウ。實際 K' トシテ $K[\mathcal{L}]$，$K^*[\mathcal{L}]$ ヲトツタ場合ニツイテハ、以下紹介スル如リ、相當ハッキリシタ結果が知ラレテ居ル。

茲ニ $K[\mathcal{L}]$ ハ，$\mathcal{L}$ ト同ジ型ノ確率法則全部ノ集合ヲ表ハス；$\mathcal{L}_1$ が $\mathcal{L}$ ト同ジ型デアルトイフノハ、$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ ニ對應スル分布函數ヲ夫々 $F(x)$, $F_1(x)$ トスルトキ，適當ニ實數 $a>0$, b ヲトレバ，$F_1(x)=F(ax+b)$ $(-\infty<x<\infty)$ トナルコトヲイフ。又 $K^*[\mathcal{L}]$ ハ，$\mathcal{L}$ ト狭イ意味デ同ジ型ノ確率法則全部ノ集合ヲ表ハス。コレハ $K[\mathcal{L}]$ ノナカデ、特ニ，上述ノ b が 0 ナル如キ確率法則全部ノ集合ヲ意味スル。$K[\mathcal{L}]$，$K^*[\mathcal{L}]$ ノ代リニ夫々 $K[F]$, $K^*[F]$ トモ書ク。

§8. $K[\mathcal{L}]$, $K^*[\mathcal{L}]$ ニ於ケル $\mathcal{L}$ ノ分解問題.

一般ニ確率法則ノ集合 K' が結合(1)ニ關シテ閉ヂテ居ルトイ

(1) 結合(composition)トハ $F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,dF_2(y)$.

フノハ，K' ＝属スル任意ノ二ツノ確率法則ノ乗積ガ又，K' ＝属スルコトヲ意味スル。特ニ，$K^*[F]$，$K[F]$ ガ結合ニ関シテ閉デテ居ル場合ニハ夫々 $F(x)$（或ハ $\mathcal{L}$）ヲバ，安定（*stable*），準安定（*quasi-stable*）ト呼ブコトニスル。安定ナ確率法則，準安定ナ確率法則ノ一般型式ハ，夫レ夫レ *Lévy*, *Khintchine* ニ依ツテ与ヘラレテ居ル。コレラハ *Gauss* ノ分布 $\Phi(x)$ ヲ特別ノ場合トシテ含ム。$K[\Phi]$ ハ実ニ著シイ性質ヲモツ。以下コレラヲ示サウ。

〔I〕 <u>$K[\Phi]$ ニ就イテ</u>： 先ヅ簡単ノ故ヲ以テ $K[\Phi]$ ニ関係シタコトカラ始メヨウ。

<u>定理6</u>. $F(x)$ ナル分布函数ハ，平均値 0，標準偏差 1 デアルトスル。然ルトキニハ，$K[F]$ ガ結合ニ関シテ閉デテ居ルタメノ必充條件ハ $F(x) \equiv \Phi(x)$.[3]

証明： (i) 充分ナコトハ，$\Phi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) * \Phi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)$ ノ特性函数ガ $exp\left(im_1t - \frac{1}{2}\sigma_1^2t^2\right) exp\left(im_2t - \frac{1}{2}\sigma_2^2t^2\right)$ デアリ、コレハ，$\Phi\left(\frac{x-m_1-m_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$ ノ特性函数ニ等シイコト

---

(2) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

(3) *Cramér* ノ書： *Random variables and distr. functions* ニアル。

(4) *Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion* (*Math. Zeitschr.* 41)

カラ明ラカデアル。 (ii) 必要ナコト： 函数方程式：
$F\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)*F\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)=F\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ カラ ν テ $m_1=m_2=\cdots\cdots=m_n=0$ トシテ $F\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)*F\left(\frac{x}{\sigma_2}\right)*\cdots\cdots*F\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)=F\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma_1^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2}}\right)$ ヲ得。従ッテ $\sigma_1=\sigma_2=\cdots\cdots=\sigma_n=1/\sqrt{n}$ トシテ、$(F(x\sqrt{n}))^{n*}=F(x)$。然ルニ一方 Lindeberg ノ中心極限定理ニヨリ $(F(x\sqrt{n}))^{n*}\longrightarrow\Phi(x)$。依ッテ $\Phi(x)=F(x)$。〔証終〕

定理 7. (Cramér)(4) $\mathfrak{K}[\Phi]$ ニ属スル分布函数ノ分解因子ハ $\mathfrak{K}[\Phi]$ ニ属スル。即チ、二ツノ分布函数 $F_1(x)$ 及ビ $F_2(x)$ ガ

$$(30)\qquad F_1(x)*F_2(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\qquad(\sigma>0)$$

ナル函数関係ヲ満足スルナラバ，実数 σ_i, m_i $(i=1,2,\ \sigma_i>0)$ ヲバ適当ニトッテ $F_i(x)=\Phi\left(\frac{x-m_i}{\sigma_i}\right)$ $(i=1,2)$ トシテ表ハシ得ル。(茲ニ $m=m_1+m_2$, $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$)

コレヲ証明スルノニハ，次ノ補助定理ヲ用ヰル。

補助定理 8. 二ツノ特性函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ ノ積 $f(t)$ ガ整函数デアルナラバ、ソノ各々モ亦整函数デアル。

証明： $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f(t)$ ニ對應スル分布函数ヲ夫々 $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F(x)$ デ表ハサウ。$f_1(t)\,f_2(t)=f(t)$ デアルカラ、適當ニ確率変数 X, U, V ヲ選ンデ，U, V

ハ相互ニ独立デ，且ツ $\mathrm{X}=\mathrm{U}+\mathrm{V}$，シカモ、$\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{X}$ ノ特性函数ハ夫々 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$f(t)$ デアルヤウニ出来ル。

一般性ヲ失フコトナシニ U, V ノ中央値ヲ 0 ニトレル。

証明ヲ次ノ四段ニ分ツ。

第一段：　$Pr\{|\mathrm{X}| \geqq x\}=F(-x-0)+1-F(x)$ ハ $x\to\infty$ ノトキ，任意ノ $r>0$ ニ對シテ、e^{-rx} ヨリ小ナル order デ 0 ニナル：

$$Pr.\{|\mathrm{X}|>x\}=o\left(e^{-rx}\right)$$

〔証〕　$f(t)$ ハ整函数デアルカラ、任意ノ実数 $r>0$ ニ對シテ

$$\frac{f(ir)+f(-ir)}{2}=\int_{-\infty}^{\infty} ch\, rx\, dF(x)$$

トナルコトカラ明ラカ。

第二段：　$$P_f(r)\equiv\frac{f(ir)+f(-ir)}{2}=1+r\int_0^{\infty} sh\, rx\, Pr\{|\mathrm{X}| \geqq x\}\, dx$$

〔証〕：第一段ト（　）トニヨリ明ラカデアル。

第三段：

$$(31)\begin{cases}\text{(i)} & Pr.\{\mathrm{X}\geqq x\}\geqq\frac{1}{2}Pr.\{\mathrm{U}>x\}\\ \text{(ii)} & Pr.\{\mathrm{X}\leqq -x\}\geqq\frac{1}{2}Pr.\{\mathrm{U}\leqq -x\}\\ \text{(iii)} & Pr.\{|\mathrm{U}|>x\}\leqq 2Pr.\{|\mathrm{X}|\geqq x\}\end{cases}$$

同様ナ関係が、V ニ関シテモ成立スル。

〔証〕：　(i) ニ関シテハ：　任意ノ正数 ε ニ関シテ

$$\Pr.\{\mathrm{X} > x+\varepsilon\} = 1 - F(x+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_1(x+\varepsilon-y))\, dF_2(y)$$

$$\geqq \int_{-\infty}^{-0} (1 - F_1(x+\varepsilon-y))\, dF_2(y)$$

$$\geqq (1 - F_1(x+\varepsilon)) \int_{-\infty}^{-0} dF_2(y)$$

假定ニヨリ、0ガ V ノ中央値デアルカラ、$\int_{-\infty}^{-0} dF_2(y)$ ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ小デハナイ。

依ツテ、任意ノ正数 ε ニ関シテ $\Pr.\{\mathrm{X}>x+\varepsilon\} \geqq \frac{1}{2}(1-F_1(x+\varepsilon))$．依ツテ $\varepsilon \downarrow 0$ ナラシメテ、

$$\Pr.\{\mathrm{X} \geqq x\} \geqq \frac{1}{2}(1 - F_1(x+0)) = \frac{1}{2}(1 - F_1(x))$$

コレカラ (i) ヲ得ル。

(ii) ニ関シテモ同様ニ出来ル．(iii) ハ (i), (ii) カラ得ラレル。

第四段：（証明ノ完了） 以上ノ三段ノ結果カラシテ

(32) $\Pr.\{|\mathrm{U}| > x\} \leqq 2P(x) = o(e^{-rx})$

（任意ノ $r>0$ ニ対シテ）

従ツテ、任意ノ $r>0$ ニ対シテ、$f_1(-ir)$, $f_1(ir)$ ガ存在スル。コノ事カラシテ $f_1(t)$ ハ t ノ整函数デアルコトヲ知ル。$f_2(t)$ ニ関シテモ同様デアル。〔証終〕

系1. 二ツノ特性函数ノ積ガ，0 ニナラヌ整函数デアルナラバ，各々モ亦 0 ニナラヌ整函数デアル。

系2. 補助定理 8 ニ於テ

(33) $M_{f_i}(r) \leqq 4M_f(r) - 2 \qquad (i=1,2)$

但シ，一般ニ $M_\varphi(r) \equiv \underset{|z| \leqq r}{Max} |\varphi(z)|$ ト置ク。

証明： 先ヅ一般ノ特性函数 $\varphi(z)$ ニ関シテ.

$$|\varphi(z)|=|\varphi(\zeta+i\zeta')|\leqq\varphi(i\zeta')$$

$$(\zeta,\zeta' \text{ real})$$

従ツテ $\varphi(i\zeta')$ ガ ζ' ニ関シテ convex ナコトニ注意シテ

$$M_\varphi(r)\leqq\max_{-r\leqq\zeta'\leqq r}|\varphi(i\zeta')|\leqq\frac{\varphi(ir)+\varphi(-ir)}{2}=P_\varphi(r)$$

又 $M_\varphi(r)$ ノ定義カラ明ラカニ、$\varphi(\pm ir)$ ハ共ニ $M_\varphi(r)$ ヲコエナイカラ、

(34) $\quad P_\varphi(r)\leqq M_\varphi(r)\leqq 2P_\varphi(r)$

ナル関係ガ一般ノ特性函数ニ関シテ成立ツ。

トナル。然ルニ補助定理8ノ第二段ト第三段(iii)トカラ、f, f_1, f_2 ノ間ニハ

$$P_{f_i}(r)\leqq 2P_f(r)-1 \qquad (i=1,2)$$

(任意ノ $r>0$ ニ對シテ)

ナル関係ガアル。依ツテ結局 $i=1,2$ ニ對シテ

$$M_{f_i}(r)\leqq 2P_{f_i}(r)\leqq 2(2P_f(r)-1)$$

$$\leqq 4P_f(r)-2\leqq 4M_f(r)-2$$

茲ニ、$r>0$ ハ任意デアル。(証終)

<u>定理7ノ証明</u>： $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ ノ特性函数 $\exp(imt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2)$ ハ 0 ニナラヌ整函数デアルカラ、F_1, F_2 ノ特性函数ヲ f_1, f_2 トスルトキ, $f_1(t), f_2(t)$ モ亦 0 ニナラヌ整函数デアル。依ツテ $f_i(t)=\exp(g_i(t))$ トナルヤウナ多項式 $g_i(t)$ ガアル。コレハ系2ニ依リ、高々2

次デナケレバナラヌ。即チ $g_i(t)=a_i+b_it+c_it^2$ トナルヤウナ常数 a_i, b_i, c_i ガアル。$a_i=0$, $c_i<0$ ナル事ハ $f_i(t)$ ガ特性函数ナルコトカラスグ分ル。〔証終〕

注意： 以上ノ如ク、定理 7 ノ証明ニハ特性函数ノ簡単ナ性質シカ用ヰテ居ナイ。シカモ、ソノ結果ハ着目ニ価スルモノト云ヘヨウ。Lévy ハ中心極限定理ノ証明ニ於イテ、コノ定理ヲ豫想シテ、コレヲ用ヰタ。始メテ証明ヲ與ヘタノハ、Cramér デアルガ、上ノ証明ハ Lévy ノ論文（I, 前掲）ニ紹介サレタ Khintchine ノ方法ニ依ル。

注意： 定理 6 ノ証明ニ於テ Lindeberg ノ中心極限定理ヲ用ヰタコト、及ビ定理 7 ガ Lévy ノ中心極限定理ノ証明ニ用ヰラレルコトニハ注意ヲ要スル。カクノ如ク、分解定理トイフヤウナ代数的ナ結果ト、中心極限定理トイフ Limit process ニ関スル結果トガ、密接ナ関係ニアルコトハ、コレカラ後ノ所論ニ於イテモ屡々見ラレルノデアル。